

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ФИЗИКА НА ЗАОЧНОМ ФАКУЛЬТЕТЕ
КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ
ЧАСТЬ I. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И
ТЕРМОДИНАМИКА**

Учебно-методическое пособие

ДГТУ
Ростов-на-Дону
2022

МЕХАНИКА

Тема 1. Кинематика поступательного и вращательного движения.

Кинематика поступательного движения

Положение материальной точки A в декартовой системе координат в данный момент времени определяется тремя координатами x , y и z или **радиусом-вектором** \vec{r} – вектором, проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1).

Движение материальной точки определяется в скалярном виде кинематическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, или в векторном виде уравнением: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой при её движении в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Пусть материальная точка движется по произвольной траектории (рис. 2). За малый промежуток времени Δt материальная точка переместиться из положения A в положение B , пройдя при этом путь Δs , равный длине участка траектории AB .

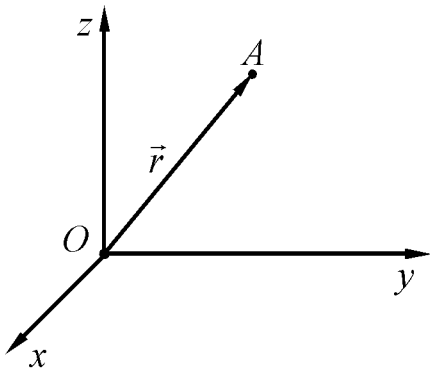


Рис. 1

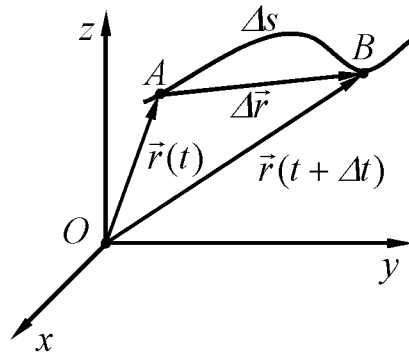


Рис. 2

Вектор $\Delta \vec{r}$, проведенный из начального положения движущейся точки в момент времени t в конечное положение точки в момент времени $(t + \Delta t)$, называется **перемещением**, то есть $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.

Вектором средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ называется отношение перемещения $\Delta \vec{r}$ к промежутку времени Δt , за который это перемещение произошло:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Направление вектора средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta \vec{r}$.

Мгновенной скоростью \vec{v} (скоростью движения в момент времени t) называется предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt , за который это перемещение произошло, при стремлении Δt к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

где $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – первая производная от функции $\vec{r}(t)$ по времени t , которую принято обозначать также в виде $\dot{\vec{r}}$.

Вектор мгновенной скорости \vec{v} направлен по касательной, проведенной в данной точке к траектории в сторону движения. При стремлении промежутка времени Δt к нулю модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$ стремится к величине пути Δs , поэтому модуль вектора \vec{v} может быть

определен через путь Δs : $v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$.

Если скорость движения точки со временем изменяется, то быстрота изменения скорости движения точки характеризуется **ускорением**.

Средним ускорением $\langle \vec{a} \rangle$ в интервале времени от t до $(t + \Delta t)$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ ($\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$) к промежутку времени Δt , за который это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенным ускорением \vec{a} или **ускорением** движения точки в момент времени t называется предел отношения изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt , за который это изменение произошло, при стремлении Δt к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}},$$

где $\frac{d\vec{v}}{dt}$ – первая производная от функции $\vec{v}(t)$ по времени t ,

$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ – вторая производная от функции $\vec{r}(t)$ по времени t .

Эти производные принято обозначать соответственно в виде: $\dot{\vec{v}}$ и $\ddot{\vec{r}}$.

Вектор ускорения \vec{a} может быть разложен на две составляющие: тангенциальную \vec{a}_τ и нормальную \vec{a}_n , то есть:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенциальная составляющая \vec{a}_τ определяет быстроту изменения модуля скорости \vec{v} :

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Вектор \vec{a}_τ направлен по касательной к траектории движения и для ускоренного движения совпадает с направлением вектора скорости \vec{v} , а для замедленного движения – противоположен вектору скорости \vec{v} .

Нормальная составляющая \vec{a}_n определяет быстроту изменения направления скорости \vec{v} :

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

где r – радиус кривизны траектории движения.

Вектор \vec{a}_n направлен по нормали к траектории движения к центру ее кривизны (поэтому нормальную составляющую ускорения называют также центростремительным ускорением).

Кинематика вращательного движения

Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса r . Изменение положения точки в пространстве за промежуток времени Δt определяется углом поворота $\Delta\varphi$ (рис. 3). Элементарный поворот на угол $\Delta\varphi$ можно рассматривать как вектор $\Delta\vec{\varphi}$. Модуль вектора $\Delta\vec{\varphi}$ равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия правого винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта**.

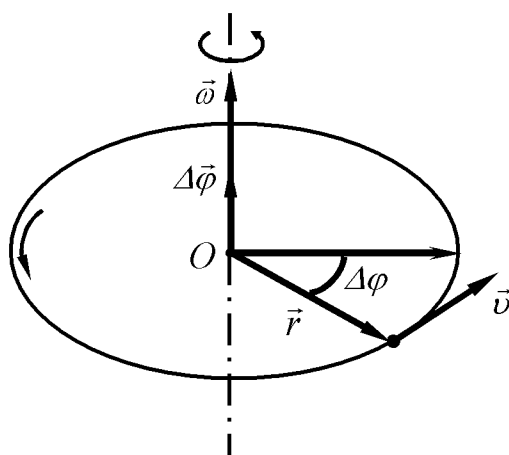


Рис. 3

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ называется векторная величина, равная пределу отношения угла поворота $\Delta\vec{\varphi}$ к промежутку времени Δt , за который этот поворот произошёл, при стремлении Δt к нулю:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}},$$

где $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – первая производная от функции угла поворота $\vec{\varphi}(t)$ радиус-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t . Эту производную принято обозначать, как $\dot{\vec{\varphi}}$. Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого винта (рис. 3).

Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется векторная величина, равная пределу отношения изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$ к промежутку времени Δt , за который это изменение произошло, при стремлении Δt к нулю:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \ddot{\vec{\varphi}},$$

где $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – первая производная от функции $\vec{\omega}(t)$ по времени t ,

$\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$ – вторая производная от функции $\vec{\varphi}(t)$ по времени t .

Эти производные принято обозначать соответственно в виде: $\dot{\vec{\omega}}$ и $\ddot{\vec{\varphi}}$.

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном вращении направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, а при замедленном – противоположно ему.

Кинематические параметры поступательного и вращательного движения связаны между собой. Связь скорости v и угловой скорости ω (см. рис. 3) определяется следующим образом: $v = \omega r$.

В векторном виде эту связь для векторов \vec{v} и $\vec{\omega}$ можно записать с помощью векторного произведения:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}].$$

Ускорение a также можно выразить через угловые параметры, разложив ускорение a на две составляющие a_τ и a_n , то есть: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Тангенциальная составляющая a_τ выражается через угловое ускорение ε :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \varepsilon r,$$

а нормальная составляющая a_n – через угловую скорость ω :

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r.$$

Тогда ускорение:

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Тема 2. Динамика поступательного движения. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, в которых всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние. Такие системы отсчета называются инерциальными.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**.

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение тела под действием приложенной к нему силы: *если на тело действует сила, то это тело приобретает ускорение, прямо пропорциональное действующей силе и обратно пропорциональное массе данного тела:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В том случае, если на тела действует не одна, а несколько сил, то приведенная в этой формуле сила \vec{F} является равнодействующей всех действующих на это тело сил и определяется их векторной суммой.

Из уравнения второго закона Ньютона следует: $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$.

В случае неизменности массы тела можно записать:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ где } \vec{p} = m\vec{v}.$$

Вектор \vec{p} называется **импульсом** (или **количеством движения**) тела.

Отсюда следует иная формулировка второго закона Ньютона, называемая формулировкой в дифференциальном виде, а именно: *скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на это тело, то есть*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

В том случае, если на тела действует не одна, а несколько сил, то приведенная в этой формуле сила \vec{F} является равнодействующей всех действующих на это тело сил и определяется их векторной суммой.

Третий закон Ньютона определяет взаимодействие между материальными точками: *если первая материальная точка действует на вторую с силой $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$, то вторая точка действует на первую с силой $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$, по модулю равной, а по направлению противоположной силе $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ (силы $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ и $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ направлены по прямой, соединяющей взаимодействующие точки).*

Импульс системы тел. Если принять, что импульс системы, состоящей из n тел, можно определить, как векторную сумму импульсов всех n тел, то есть $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$, то из третьего закона Ньютона при условии отсутствия внешних сил (то есть, для замкнутой системы) следует:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = 0, \text{ т.е. } \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

Таким образом, *импульс замкнутой системы тел не изменяется с течением времени*, что является **законом сохранения импульса**.

Тема 3. Работа. Кинетическая, потенциальная и полная энергия

Работа. Если на тело, движущееся прямолинейно, действует постоянная сила \vec{F} , которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения $\Delta\vec{r}$, то работа этой силы равна скалярному произведению векторов \vec{F} и $\Delta\vec{r}$:

$$A = (\vec{F} \Delta\vec{r}) = F \cos \alpha \Delta r.$$

Для переменной по величине и направлению силы \vec{F} вводится понятие **элементарной работы** dA силы \vec{F} на элементарном перемещении $d\vec{r}$:

$$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = F \cos \alpha dr,$$

где α – угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$.

Работа A силы F на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ dA на отдельных элементарных

участках траектории, что приводит к интегралу: $A = \int_1^2 F \cos \alpha dr$.

Кинетическая энергия – это механическая энергия движения тел.

Тело массой m , движущееся со скоростью v , обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия – это механическая энергия системы тел, определяемая взаимным расположением тел или частей одного и того же тела относительно друг друга и характером сил взаимодействия между ними. Если взаимодействие тел таково, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений, то такие силы называются **консервативными**. Если же работа, совершаемая силой, зависит от выбора траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**. Примером такой силы является сила трения.

Полная механическая энергия системы тел равна сумме кинетической и потенциальной энергий, то есть $E = T + \Pi$. Если неконсервативные силы отсутствуют, то полная механическая энергия системы сохраняется:

$$E = T + \Pi = \text{const}.$$

Таким образом, в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, что является **законом сохранения полной механической энергии системы тел**.

Тема 4. Момент инерции твердого тела. Теорема Штейнера

Моментом инерции материальной точки массой m относительно некоторой оси вращения называется физическая величина I , равная произведению массы этой материальной точки на квадрат расстояния r от этой точки до данной оси вращения:

$$I = mr^2.$$

Для того, чтобы найти **момент инерции твердого тела** относительно некоторой оси вращения, необходимо разбить это тело на элементарные объемы так, чтобы каждый элементарный объем можно было рассматривать как материальную точку массой m_i , находящуюся на определенном расстоянии r_i от данной оси вращения. Тогда **момент инерции твердого тела** I равен сумме моментов инерции всех n материальных точек массами m_i , на которые разбито это тело, или сумме произведений масс материальных точек m_i на квадраты расстояний r_i от этих материальных

точек до рассматриваемой оси:
$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой h и радиусом R относительно оси, перпендикулярной основанию цилиндра и проходящей через его центр масс (рис. 4).

Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним $(r+dr)$. Так как $dr \ll r$, то считаем, что расстояние всех точек полого цилиндра от оси равно r . Поэтому момент инерции каждого полого цилиндра можно определить следующим образом:

$$dI = r^2 dm,$$

где dm – масса элементарного полого цилиндра, равная ρdV

(ρ – плотность материала, dV – объем полого цилиндра, равный $2\pi r h dr$).

Тогда момент инерции элементарного полого цилиндра $dI = 2\pi \rho h r^3 dr$.

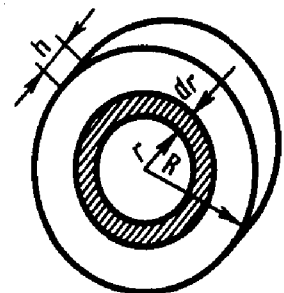


рис. 4

Следовательно, момент инерции сплошного цилиндра

$$I = \int dI = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi\rho h R^4.$$

Так как $\pi R^2 h$ — объем сплошного цилиндра, а $\pi\rho h R^2$ — его масса, то момент инерции сплошного цилиндра $I = \frac{1}{2} m r^2$.

Теорема Штейнера. Если известен момент инерции тела I_c относительно оси OO' , проходящей через центр масс тела, то момент инерции этого же тела относительно другой оси $O_1O'_1$, параллельной оси OO' , равен сумме момента инерции I_c и произведения массы m данного тела на квадрат расстояния a между этими осями OO' и $O_1O'_1$, то есть:

$$I = I_c + m a^2.$$

Тема 5. Кинетическая энергия и работа вращательного движения

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, имеют различные скорости v_i . Поэтому для того, чтобы найти **кинетическую энергию вращательного движения твердого тела**, необходимо разбить это тело на элементарные объемы так, чтобы каждый элементарный объем можно было рассматривать как материальную точку массой m_i , находящуюся на определённом расстоянии r_i от данной оси вращения. Тогда **кинетическая энергия вращательного движения твердого тела** T_{ep} равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек массами m_i , на

которые разбито это тело:

$$T_{ep} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Так как для твердого тела угловая скорость вращения ω всех материальных точек, на которые разбито это тело, одинакова, то

$$T_{ep} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2},$$

где I — момент инерции тела относительно его оси вращения.

Момент силы. Если на тело, имеющее ось вращения OO' , действует сила \vec{F} , причем вектор силы \vec{F} расположен в плоскости, перпендикулярной оси OO' (рис. 5), то моментом этой силы \vec{F} относительно неподвижной оси OO' называется величина, равная произведению модуля силы \vec{F} на плечо l этой силы относительно оси OO' : $M = Fl$, где l — плечо силы \vec{F} .

Плечо силы \vec{F} есть расстояние между осью OO' и линией действия силы \vec{F} .

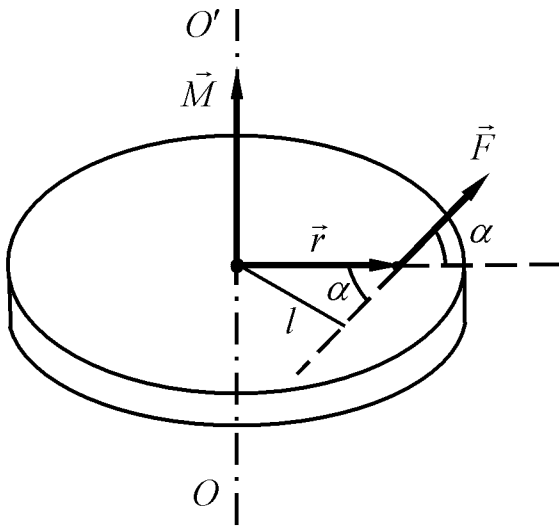


Рис. 5

(Момент \vec{M} силы \vec{F} относительно оси вращения OO' является векторной величиной, определяется векторным произведением векторов \vec{r} и \vec{F} (рис. 5): $\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$, направлен вдоль оси вращения OO' в соответствии с правилом правого винта, а модуль вектора \vec{M} определяется в виде $M = rF \sin \alpha = Fl$).

Работа при вращении твердого тела. При повороте тела на бесконечно малый угол $d\vec{\varphi}$ вокруг оси OO' под действием силы \vec{F} совершается элементарная работа:

$$dA = (\vec{M} d\vec{\varphi}),$$

где \vec{M} – момент силы \vec{F} относительно оси OO' .

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела может быть получено, исходя из того, что элементарная работа при вращении твердого тела идет на элементарное увеличение его кинетической энергии, то есть:

$$dA = dT.$$

Так как $dA = Md\varphi$, а $dT = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{I}{2}d(\omega^2) = I\omega d\omega$, то

$$Md\varphi = I\omega d\omega \quad \text{или} \quad M \frac{d\varphi}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, а $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$,

получим:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

или в векторном виде:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}.$$

В приведенной формуле: $\vec{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения;

\vec{M} – вектор момента силы, действующей на тело, относительно его оси вращения; I – момент инерции тела относительно его оси вращения.

В том случае, если на тело, имеющее ось вращения, действует не одна, а несколько сил, то приведенный в этой формуле момент силы \vec{M} является результирующим моментом всех действующих на это тело сил и определяется векторной суммой всех моментов действующих сил относительно оси вращения данного тела.

Это уравнение есть **уравнение динамики вращательного движения твердого тела**: если на тело, имеющее ось вращения, действуют силы, то это тело приобретает угловое ускорение, прямо пропорциональное векторной сумме моментов всех действующих сил и обратно пропорциональное моменту инерции тела относительно его оси вращения.

Тема 6. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса материальной точки, вращающейся относительно неподвижной оси OO' , называется величина L , равная произведению импульса $m\vec{v}$ этой точки на расстояние r от этой точки до оси вращения:

$$L = m v r .$$

Момент импульса является векторной величиной. Вектор \vec{L} направлен по оси вращения в соответствии с правилом правого винта.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его точки, находящиеся на различном расстоянии r_i от оси вращения, имеют различные скорости v_i . Поэтому, чтобы найти **момент импульса твердого тела** относительно некоторой оси вращения, необходимо разбить это тело на элементарные объемы так, чтобы каждый элементарный объем можно было бы рассматривать как материальную точку массой m_i , находящуюся на расстоянии r_i от оси вращения, движущаяся со скоростью v_i .

Тогда **момент импульса твердого тела** L равен сумме моментов импульса всех n материальных точек массами m_i , на которые разбито это тело:

$$L = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i .$$

Так как для твердого тела угловая скорость вращения ω всех материальных точек, на которые разбито это тело, одинакова, то, используя формулу

$$v_i = \omega r_i, \text{ получим } L = \sum_{i=1}^n m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I \omega$$

или в векторной форме: $\vec{L} = I \vec{\omega}$.

Продифференцировав это уравнение по времени, получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \text{ откуда } \frac{d\vec{L}}{dt} = I \vec{\varepsilon} = \vec{M} .$$

То есть $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$

Это выражение – еще одна форма **уравнения динамики вращательного движения твердого тела**: скорость изменения момента импульса твердого тела относительно оси вращения равна векторной сумме моментов всех действующих на это тело сил относительно той же оси вращения.

В замкнутой системе векторная сумма моментов внешних сил равна нулю. Тогда $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ и, следовательно, $\vec{L} = const$.

Таким образом, *момент импульса замкнутой системы сохраняется*, что является **законом сохранения момента импульса**.

Тема 7. Механические колебания. Пружинный маятник

Механическими колебаниями называются движения, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

Гармоническими называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (или косинуса).

Пружинный маятник – это колебательная система, состоящая из груза массой m , закрепленного на пружине, совершающая гармонические колебания под действием упругой силы \vec{F} , зависящей от величины линейной деформации x по закону Гука ($F_x = -kx$, где k – **жесткость пружины**).

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения маятника:

$$ma = -kx.$$

Так как ускорение a является второй производной от смещения x ($a = \ddot{x}$), то

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Если обозначить $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, то получим дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний пружинного маятника:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция $x(t)$:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $x(t)$ – отклонение тела от положения равновесия в момент времени t ;

A – **амплитуда колебания**, то есть максимальное отклонение колеблющегося тела от положения равновесия;

ω_0 – **круговая (циклическая) частота**;

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ – **фаза колебания** в момент времени t ;

φ_0 – **начальная фаза колебания**.

Круговая частота $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, где T – **период колебаний**: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Кинетическая энергия колебаний пружинного маятника:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Потенциальная энергия колебаний пружинного маятника:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная энергия колебаний пружинного маятника:

$$E = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2},$$

откуда видно, что полная энергия свободных незатухающих гармонических колебаний пружинного маятника остается со временем постоянной.

Свободные затухающие гармонические колебания пружинного маятника (рис. 6). Для пружинного маятника массой m , совершающего колебания под действием упругой силы \vec{F} ($F_x = -kx$) с учетом силы сопротивления \vec{F}_c , пропорциональной скорости v движения груза ($F_{cx} = -rv_x$), второй закон Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x},$$

где r – **коэффициент сопротивления**.

Обозначив $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{r}{m} = 2\delta$ (δ – **коэффициент затухания**), получим дифференциальное уравнение свободных затухающих гармонических колебаний пружинного маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения в случае малых затуханий ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) является функция $x(t)$:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A_0 e^{-\delta t}$ – **амплитуда** затухающих колебаний в момент времени t ;

A_0 – **начальная амплитуда**, т.е. амплитуда в момент времени $t = 0$,

ω – **круговая (циклическая) частота**: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Период затухающих гармонических колебаний пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}.$$

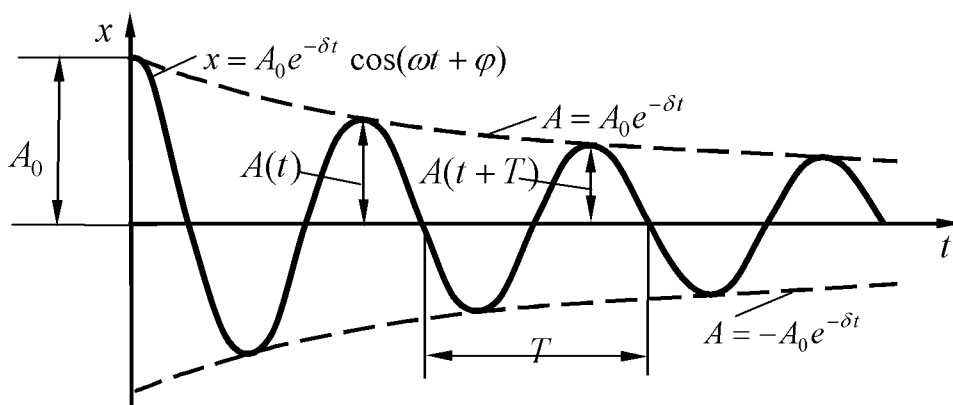


Рис. 6

Декремент затухания. Если $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний (рис. 6), то отношение этих величин называется

декрементом затухания $\lambda = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$.

Логарифм λ называется **логарифмическим декрементом затухания** θ :

$$\theta = \ln \lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T.$$

Тема 8. Гармонические колебания физического маятника

Физический маятник – это твердое тело, имеющее ось вращения и совершающее колебания под действием тангенциальной составляющей силы тяжести F_τ ($F_\tau = mg \sin \alpha$ (рис. 7)).

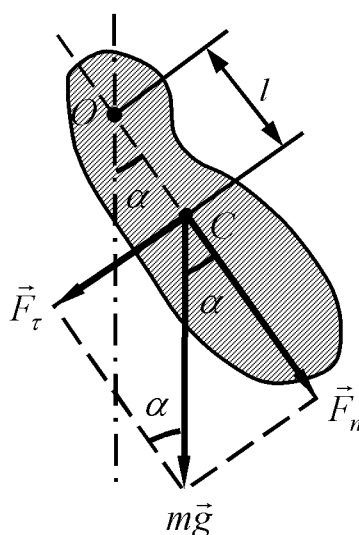


Рис. 7

Если физический маятник массой m отклонен от положения равновесия на некоторый угол α , то момент M возвращающей силы F_τ :

$$M = F_\tau l = mgl \sin \alpha,$$

где l – плечо силы F_τ , то есть расстояние от центра масс (C) до оси маятника.

В случае малых колебаний физического маятника, то есть для малых углов отклонения маятника от положения равновесия $\sin \alpha \approx \alpha$ и тогда

$$M = mgl\alpha.$$

По второму закону Ньютона для вращательного движения твердого тела:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} = -\frac{mgl}{I}\alpha,$$

где I — момент инерции маятника относительно его оси.

Знак минус в последнем уравнении обусловлен тем, что вектора момента силы \vec{F}_τ и угла поворота $\vec{\alpha}$ имеют противоположные направления.

Обозначив $\frac{mgl}{I} = \omega_0^2$, получим дифференциальное уравнение свободных незатухающих гармонических колебаний физического маятника:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $\alpha(t)$ — отклонение физического маятника от положения равновесия в момент времени t ;

α_0 — **амплитуда колебаний**;

ω_0 — **круговая (циклическая) частота**;

$(\omega_0 t + \varphi_0)$ — **фаза колебаний** в момент времени t ;

φ_0 — **начальная фаза колебаний**.

Период малых гармонических колебаний физического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Тема 9. Механические волны

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется **волной**. **Упругими (или механическими)** называются волны, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают **продольные** и **поперечные**.

В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, а в **поперечных** — в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. **Продольные** волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения, то есть в твердых, жидких и газообразных телах.

Поперечные волны могут возбуждаться только в твердых телах, в которых возникают упругие деформации сдвига.

Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль оси x , представлена на рис.8, то есть приведена зависимость смещения ξ частиц среды, участвующих в волновом процессе, от расстояния x от этих частиц до источника колебаний O для момента времени t . Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны** λ . Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T , т. е. $\lambda = vT$.

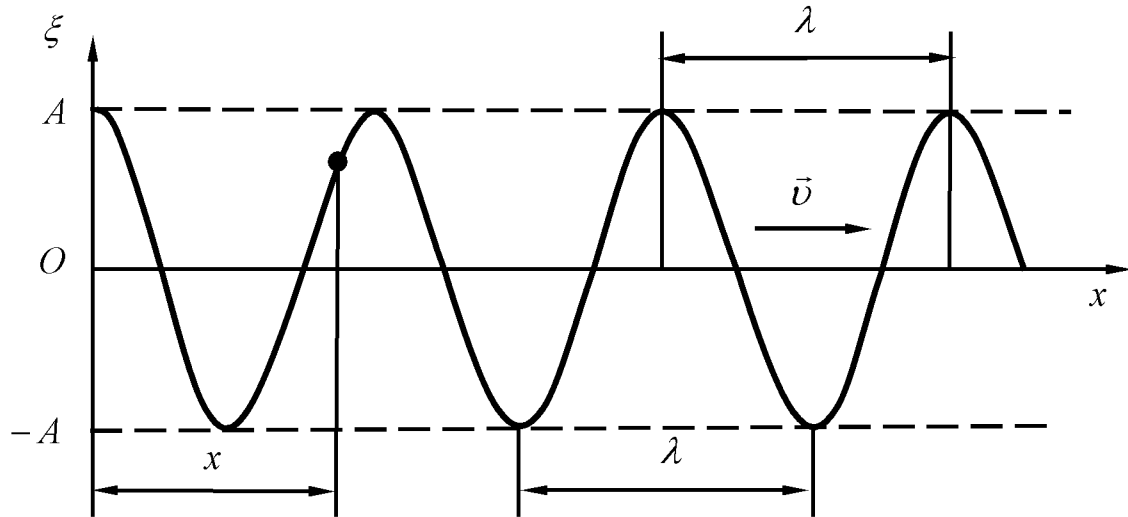


Рис. 8

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. Если волновые поверхности представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер, то, соответственно, **волна** называется **плоской** или **сферической**.

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x имеет вид:

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right],$$

где A – **амплитуда волны**;

ω – **круговая (циклическая) частота**;

$\left[\omega (t - \tau) + \varphi_0 \right]$ – **фаза плоской волны**;

φ_0 – **начальная фаза**, определяемая выбором начала отсчета для x и для t .

Для характеристики волн используется **волновое число** k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

С учетом этого выражения для k , уравнение плоской волны примет вид:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Тема 11. Уравнение состояния идеального газа.

Состояние системы задается **термодинамическими параметрами** – совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы, например, давлением p , объемом V и температурой T . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая **уравнением состояния**, которое имеет общий вид:

$$f(p, V, T) = 0,$$

где каждая из переменных является функцией двух других.

Для **идеального** газа уравнением состояния является **уравнение Клапейрона – Менделеева**:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \nu RT,$$

где m – масса газа, μ – молярная масса (масса одного моля вещества),

$$\nu = \frac{m}{\mu} \text{ – количество вещества,}$$

R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,31 \text{ Дж/(моль } K)$.

(Идеальным называется такой газ, в котором считается, что собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором он находится, силы взаимодействия между молекулами газа отсутствуют, а столкновения между молекулами газа абсолютно упругие.)

Исходя из уравнения Клапейрона – Менделеева и понятия концентрации n

(n – число молекул в единице объема: $n = \frac{N}{V}$, где N – число всех молекул газа), можно получить уравнение состояния идеального газа в ином виде:

$$p = \nu \frac{RT}{V} = \frac{N}{N_A} \frac{RT}{V} = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T = nkT, \text{ то есть } p = nkT,$$

где N_A – постоянная Авогадро – число молекул в одном моле вещества,

$k = R / N_A$, k – постоянная Больцмана.

Тема 12. Термодинамические процессы. Изопроцессы.

Любое изменение в системе, связанное с изменением ее термодинамических параметров, называется **термодинамическим процессом**.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева следует, что для данной массы газа

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad \text{в любом термодинамическом процессе,}$$

что является формулировкой **объединенного газового закона**.

Если в термодинамическом процессе один из параметров газа (p, V, T) не изменяется, то такой процесс называется **изопроцессом**.

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется **изобарным**. Из объединенного газового закона для изобарного процесса следует:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (\text{уравнение изобарного процесса}).$$

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется **изохорным**. Из объединенного газового закона для изохорного процесса следует:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad (\text{уравнение изохорного процесса}).$$

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется **изотермическим**. Для изотермического процесса:

$$pV = \text{const} \quad (\text{уравнение изотермического процесса}).$$

Тема 13. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа связывает термодинамические параметры газа с параметрами, характеризующими движение его молекул. Так, давление газа, как следствие соударений молекул газа со стенками сосуда, определяется, согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории идеального газа, кинетической энергией поступательного движения молекул газа.

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа полагают, что соударения молекул газа со стенками сосуда являются абсолютно упругими. Тогда, при соударении одна молекула газа массой m_0 , движущаяся перпендикулярно стенке сосуда со скоростью v , передает ей импульс $\Delta P_1 = m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v$.

Выделив на стенке сосуда элементарную площадку ΔS (рис. 9), определяют давление газа p на эту площадку. Построив цилиндр с основанием ΔS и высотой $v \cdot \Delta t$ (рис. 9), учитывают, что число молекул, способных за время Δt достигнуть площадки ΔS соответствует

1/6 части всех N молекул, содержащихся в объеме выделенного цилиндра ($N = n \cdot V = n \Delta S \cdot v \cdot \Delta t$, где n – концентрация молекул). Коэффициент 1/6 учитывает, что из всех N молекул, движущихся хаотично вдоль трех (x, y, z) взаимно перпендикулярных

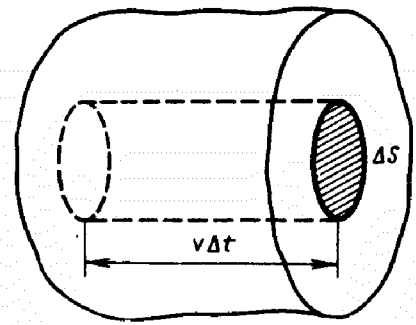


Рис. 9

направлений, только их 1/6 часть движется по направлению к площадке ΔS , как одному из шести ($x, -x, y, -y, z, -z$) возможных направлений. Тогда число ударов молекул, движущихся в данном направлении, о площадку ΔS

за время Δt будет равно: $\frac{1}{6} n \Delta S v \Delta t$.

При столкновении с площадкой ΔS эти молекулы передадут ей импульс ΔP :

$$\Delta P = \frac{1}{6} n \Delta S v \Delta t \cdot 2m_0 v = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \Delta S \Delta t ,$$

что соответствует, согласно второму закону Ньютона, действию силы F :

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 \cdot \Delta S .$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенки сосуда:

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2 .$$

Однако, молекулы газа движутся с различными скоростями v_1, v_2, \dots, v_N , что можно учесть в полученной формуле, введя понятие **средней квадратичной скорости** движения молекул $\langle v_{кв} \rangle$:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} , \text{ тогда } p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2 .$$

Так как $n = \frac{N}{V}$, а $\frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \langle \varepsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия движения

одноатомной молекулы, то получим: $p = \frac{2}{3} \frac{1}{V} N \langle \varepsilon \rangle = \frac{2}{3} \frac{1}{V} E$,

где E – суммарная кинетическая энергия всех молекул газа, $E = N \cdot \langle \varepsilon \rangle$.

Таким образом, получены два эквивалентных уравнения:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2 \quad \text{и} \quad p = \frac{2}{3} \frac{1}{V} E ,$$

связывающие кинематические параметры движения отдельных молекул газа с термодинамическими параметрами газа в целом, каждое из которых называют **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеального газа**.

Из сравнения между собой уравнений $p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle$ и $p = nkT$ следует, что

$$T = \frac{2}{3} \frac{1}{k} \langle \varepsilon \rangle ,$$

то есть еще одно уравнение, связывающее термодинамический параметр газа (T) со средней кинетической энергией молекулы одноатомного газа $\langle \varepsilon \rangle$.

С другой стороны, величина средней кинетической энергии молекул газа $\langle \varepsilon \rangle$ определяется температурой газа T (для случая одноатомного газа):

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT .$$

Тема 14. Распределение молекул идеального газа по скоростям.

В газе, находящемся в состоянии равновесия при определенной температуре, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям. Максвелл установил, что это распределение для идеального газа описывается некоторой функцией $f(v)$, называемой **функцией распределения молекул газа по скоростям**.

Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные dv , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул $dN(v)$, имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, т. е.

$$dN(v)/N = f(v)dv, \quad \text{откуда} \quad f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}.$$

Применяя методы теории вероятностей, Максвелл нашел вид этой функции:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp[-m_0 v^2 / (2kT)],$$

где m_0 – масса одной молекулы газа.

График этой функции приведен на рисунке 10.

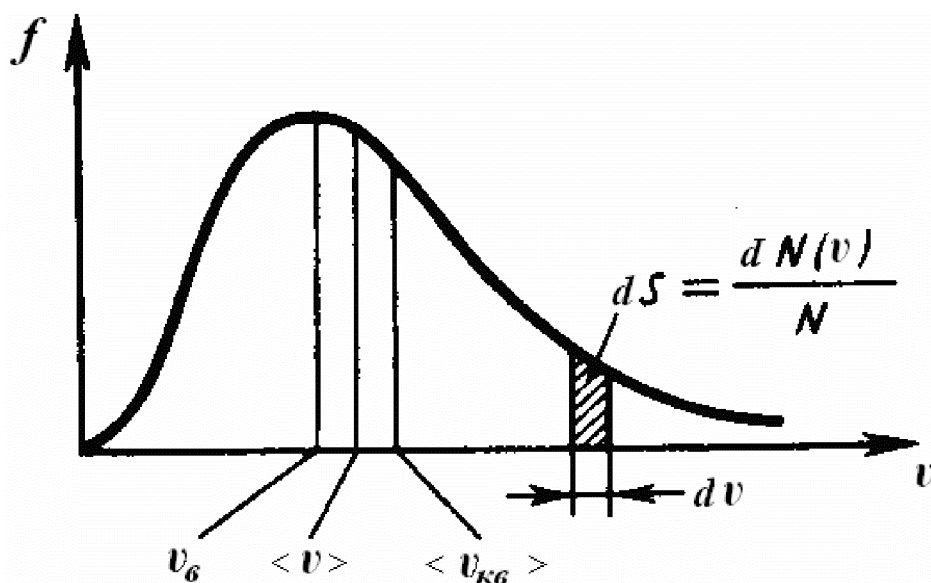


Рис. 10

Относительное число молекул $dN(v)/N$, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, соответствует площади заштрихованной на рис. 2 полоски. Площадь под всей кривой распределения $f(v)$ равна единице. Это означает, что функция $f(v)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью** v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Из этой формулы следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рис. 11) смещается вправо. При этом величина максимума функции распределения молекул по скоростям $f(v)$ с повышением температуры уменьшается (рис. 11).

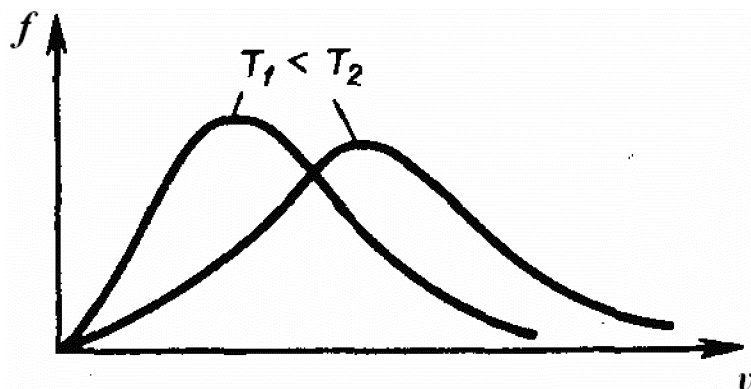


Рис. 11

Кроме наиболее вероятной скорости v_B , на рисунке 10 приведены также **средняя арифметическая скорость** молекул $\langle v \rangle$ и **средняя квадратичная скорость** молекул $\langle v_{\text{кв}} \rangle$, которые определяются по формулам:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}; \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Тема 15. Явления переноса (диффузия, теплопроводность, вязкость).

В неравновесных системах возникают особые необратимые процессы, называемые **явлениями переноса**, в результате которых происходит пространственный перенос массы, энергии, импульса.

Диффузия обусловлена переносом массы, **теплопроводность** – переносом энергии, а **вязкость** – переносом импульса.

Для характеристики необратимых процессов переноса вводятся параметры теплового движения молекул: среднее число соударений молекулы в единицу времени $\langle z \rangle$ и средняя длина свободного пробега молекул $\langle l \rangle$.

Среднее число соударений молекулы за 1 с: $\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle$,

где d – эффективный диаметр молекул, т.е. минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул,

πd^2 – эффективное сечение молекул, n – концентрация молекул,

$\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул $\langle l \rangle$, т.е. средний путь, проходимый молекулой между двумя последовательными столкновениями:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

При рассмотрении одномерных явлений переноса система отсчета выбирается так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

1. Диффузия. Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное взаимопроникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел. Диффузия сводится к переносу массы, возникает и продолжается до тех пор, пока на границе соприкосновения двух сред градиент плотности отличен от нуля.

Градиент плотности ρ вдоль выбранной оси x , перпендикулярной плоскости соприкосновения двух сред, обозначается как $\frac{d\rho}{dx}$ и показывает

как быстро изменяется величина плотности ρ от точки к точке вдоль оси x .

Количественно явление диффузии подчиняется **закону Фика**:

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx},$$

где j_m – **плотность потока массы**, то есть величина, определяемая массой газа, диффундирующего через единичную площадку S в единицу времени,

$\frac{d\rho}{dx}$ – **градиент плотности** газа в направлении x , перпендикулярном выбранной площадке S ,

D – **коэффициент диффузии**.

Знак минус в приведенной формуле означает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности.

Согласно молекулярно-кинетической теории идеального газа, коэффициент

диффузии D :

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул,

$\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

2. Теплопроводность. Если в одной области газа температура больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, то есть процесс выравнивания температуры. Этот процесс переноса энергии, называемый **теплопроводностью**, возникает и продолжается до тех пор, пока на границе соприкосновения двух частей газа градиент температуры отличен от нуля.

Градиент температуры T газа вдоль выбранной оси x , перпендикулярной плоскости соприкосновения двух частей газа, имеющих различную температуру, обозначается как $\frac{dT}{dx}$ и показывает как быстро изменяется

температура газа от точки к точке вдоль оси x .

Количественно **теплопроводность** подчиняется **закону Фурье**:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

где j_E – **плотность теплового потока**, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты через единичную площадку S в единицу времени,

$\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры в направлении x , перпендикулярном выбранной площадке S ,

λ – **коэффициент теплопроводности**.

Знак минус в приведенной формуле означает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры.

Согласно молекулярно-кинетической теории идеального газа, коэффициент

теплопроводности λ :

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при изохорном процессе (количество теплоты, необходимое для изохорного нагревания 1 кг газа на 1 K),

ρ – плотность газа,

$\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул,

$\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

3. Вязкость. Вязкость это свойство жидкости или газа, обусловленное **внутренним трением** между соприкасающимися параллельными слоями жидкости или газа, движущимися с различными скоростями. В результате, импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее. Другими словами, **внутреннее трение** приводит к переносу импульса от одного движущегося слоя жидкости или газа к другому соприкасающемуся с ним слою.

Количественно **сила внутреннего трения** между двумя соприкасающимися слоями жидкости или газа подчиняется **закону Ньютона**:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S,$$

где η – **коэффициент динамической вязкости**,

$\frac{dv}{dx}$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости течения жидкости или газа от слоя к слою в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев,

S – площадь соприкосновения слоев жидкости или газа, на которые действует сила внутреннего трения F .

Закон Ньютона для внутреннего трения можно представить в виде:

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx},$$

где j_p – **плотность потока импульса** – величина, определяемая импульсом, переносимым в единицу времени через единичную площадку S соприкосновения слоев жидкости или газа в направлении оси x , перпендикулярном направлению движения слоев жидкости или газа.

Знак минус в приведенной формуле означает, что импульс переносится от слоя к слою жидкости (газа) в направлении убывания скорости их движения.

Согласно молекулярно-кинетической теории идеального газа, коэффициент динамической вязкости идеального газа η определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где ρ – плотность газа,

$\langle v \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул,

$\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Тема 16. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия. Работа.

Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.

Внутренней энергией газа U называется сумма кинетической энергии хаотического (теплового) движения всех молекул газа и энергии взаимодействия молекул газа между собой. Для идеального газа внутренняя энергия – это только кинетическая энергия всех молекул газа.

Внутренняя энергия идеального газа определяется числом степеней свободы его молекул и температурой газа.

Числом степеней свободы i механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть однозначно задано положение системы в пространстве.

Согласно **закону о равнораспределении** энергии по степеням свободы молекул для термодинамической системы, находящейся в равновесии, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в

среднем кинетическая энергия, равная $\frac{kT}{2}$, а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная kT .

Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы.

Таким образом, средняя кинетическая энергия молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где i – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}} .$$

Внутренняя энергия N молекул идеального газа:

$$U = N \cdot \langle \varepsilon \rangle = N \cdot \frac{i}{2} kT$$

Так как число молекул газа $N = \nu \cdot N_A$ (N_A – число Авогадро), где $\nu = \frac{m}{\mu}$,

то, с учетом соотношения $N_A \cdot k = R$, получим:

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT .$$

Изменение внутренней энергии ΔU при изменении температуры от T_1 до T_2 :

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \Delta T , \quad \text{где } \Delta T = T_2 - T_1 .$$

Внутреннюю энергию газа можно увеличить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты Q , которое может быть израсходовано также и на совершение механической работы A по расширению газа. При этом соблюдается закон сохранения и превращения энергии. Применительно к термодинамическим процессам это и есть **первое начало термодинамики**: количество теплоты Q , сообщаемое термодинамической системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии ΔU и на совершение механической работы A против внешних сил:

$$Q = \Delta U + A .$$

Работа A , совершаемая газом при изменении его объема от V_1 до V_2 :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV ,$$

где $p dV$ – элементарная работа при изменении объема газа на dV .

Работа газа при изопроцессах.

1. Изобарный процесс ($p = \text{const}$). При изобарном процессе работа газа при увеличении объема от V_1 до V_2 равна:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = p\Delta V,$$

а первое начало термодинамики для изобарного процесса примет вид:

$$Q = \Delta U + p\Delta V.$$

2. Изохорный процесс ($V = \text{const}$). При изохорном процессе газ не совершает работы против внешних сил, то есть $A=0$, а первое начало термодинамики для изохорного процесса примет вид:

$$Q = \Delta U.$$

т. е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на увеличение его внутренней энергии.

3. Изотермический процесс ($T=\text{const}$). Работа при изотермическом расширении газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так как при постоянной температуре внутренняя энергия идеального газа не изменяется, то первое начало термодинамики для изотермического процесса:

$$Q = A,$$

то есть все количество теплоты Q , сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы A против внешних сил.

Тема 17. Теплоемкость газа при изопроцессах. Уравнение Майера.

Теплоемкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на 1 K .

Удельная теплоемкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 K :

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}.$$

Молярная теплоемкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 K :

$$C = \frac{Q}{\nu \cdot \Delta T}, \text{ откуда } Q = C \cdot \nu \cdot \Delta T.$$

Различают теплоемкости газа при изохорном и изобарном процессах.

1. Молярная теплоемкость газа при изохорном процессе (C_V).

Для изохорного процесса первое начало термодинамики можно записать в следующем виде:

$$Q = \Delta U.$$

Так как $Q = C \cdot \nu \cdot \Delta T$, то для изохорного процесса:

$$C_V \cdot \nu \cdot \Delta T = \nu \frac{i}{2} R \Delta T,$$

откуда

$$C_V = \frac{i}{2} R,$$

где i – число степеней свободы молекулы.

2. Молярная теплоемкость газа при изобарном процессе (C_p).

Для изобарного процесса первое начало термодинамики можно записать в следующем виде:

$$Q = \Delta U + p \Delta V.$$

Так как для изобарного процесса $p \Delta V = \nu R \Delta T$,

то

$$C_p \cdot \nu \cdot \Delta T = \nu \frac{i}{2} R \Delta T + \nu R \Delta T,$$

откуда

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} \cdot R.$$

Уравнение Майера.

Сравнение между собой C_p и C_V приводит к уравнению Майера:

$$C_p = C_V + R.$$

Это уравнение показывает, что C_p больше, чем C_V на величину универсальной газовой постоянной R . Это объясняется тем, что при изобарном нагревании газа, в отличие от изохорного нагревания, требуется дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа. Таким образом, молярная теплоемкость газа определяется лишь числом степеней свободы и не зависит от температуры. Это утверждение справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных газов. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от температуры.

Тема 18. Адиабатический процесс.

Адиабатическим называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой. При адиабатическом процессе изменяются все термодинамические параметры (p , V , T) в соответствии с **уравнением Пуассона**:

$$pV^\gamma = const,$$

где γ – **коэффициент Пуассона**, равный отношению молярных теплоемкостей C_p/C_V .

Полученное выражение есть **уравнение адиабатического процесса** в переменных p и V .

Для перехода от переменных p и V к переменным V , T или p , T при описании адиабатического процесса используется уравнение Клапейрона — Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

В результате соответствующие уравнения адиабатического процесса:

$$V^{\gamma-1}T = const \quad \text{в переменных } V \text{ и } T,$$

$$p^{1-\gamma}T^\gamma = const \quad \text{в переменных } p \text{ и } T.$$

Работа газа при адиабатическом процессе.

Из первого начала термодинамики ($Q = \Delta U + A$) для адиабатического процесса ($Q = 0$) следует, что $A = -\Delta U$.

Если газ адиабатически расширяется от объема V_1 до объема V_2 , то его температура уменьшается от T_1 до T_2 и работа расширения идеального газа:

$$A = -\Delta U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_1 - T_2).$$

Используя уравнение адиабатического процесса в переменных V и T , то есть $V^{\gamma-1}T = const$ полученное выражение для работы A при адиабатическом расширении газа можно преобразовать к иному виду, отражающему адиабатическое изменение объема газа от величины V_1 до величины V_2 :

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$